VI. APPLICATIONS - SURJECTIONS - INJECTIONS - BIJECTIONS

APPLICATIONS

1. : Soit f l'application du plan P rapporté à un repère orthonormé dans lui-même qui a tout point $M \left| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right.$ fait correspondre le point $M' = f(M) \left| \begin{matrix} xy \\ x+y \end{matrix} \right.$; soit D la droite d'équation $y = x$; déterminer et tracer les ensembles $f^{-1}(D)$ et $f(D)$.

2. * : Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux ensembles disjoints. Soient $x \in \mathbb{E}$, $y \in \mathbb{F}$, $f \in \mathbb{F}^{\mathbb{E}}$, $g \in \mathbb{E}^{\mathbb{F}}$ et $T \in \left(\mathbb{F}^{\mathbb{E}}\right)^{\mathbb{F}^{\mathbb{E}}}$. Parmi les expressions suivantes, dire lesquelles ont un sens, et lesquelles sont égales. Dire également dans quel ensemble elles vivent.

   (a) $a = g(T(f))(x)$; $b = f \circ g$; $c = g(T(f)(x))$; $d = T(f)(x)$ $(= (T(f))(x))$;
   $e = T(f(x))$; $h = g \circ (T(f))(x)$; $i = T(T(f))(x)$; $j = T(T(f)(x))$;
   $k = (T(f) \circ g)(y)$; $l = (T \circ T)(f)(x)$; $m = f(g(y))$; $n = g \circ (T(f))$; $o = (g \circ T)(f)$.

3. * : soit $T \in \left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right)^{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$ définie par $T(f)(x) = f(x+1) + f(x)$, pour $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $x \in \mathbb{R}$; pour n entier naturel, on pose $T^n = \underbrace{T \circ T \circ ... \circ T}_{n \text{ fois}}$

   (a) Calculer $T^2(f)(x)$ et $T^3(f)(x)$.
   (b) Proposer une formule générale pour $T^n(f)(x)$ et la montrer par récurrence.

4. : Soit f une application de E dans lui-même et F l'ensemble de ses points fixes.

   (a) Montrer que $f \circ f = f$ ssi $f(E) \subset F$.
   (b) * Dénombrer les applications f vérifiant $f \circ f = f$ quand $|E| = n$.

INJECTIONS SURJECTIONS BIJECTIONS

5. : des maths au français.
   Les élèves d'une classe sont assis dans une salle ; soit E l'ensemble des élèves, C l'ensemble des chaises et f l'application définie par $\left\{ \begin{array}{c} E \to C \\ x \mapsto f(x) = \text{la chaise sur laquelle } x \text{ est assis} \end{array} \right.$ .Que signifient concrètement les phrases suivantes ?

   (a) f n'est pas surjective ?
   (b) f n'est pas injective ?
   (c) f est bijective ?

6. : du français aux maths.
   Interpréter les phrases suivantes en termes d'applications. On n'oubliera pas de définir correctement l'ensemble de départ et celui d'arrivée.

   (a) Dans cette classe, il y a des élèves qui ont le même âge.
   (b) Dans cette classe, chaque élève est né un jour différent de l'année.
   (c) Toute ville de France possède au moins une église.
   (d) Il y a des villes qui ont plusieurs églises.
   (e) Il y a des réels qui n'ont pas de racine carrée.
   (f) Tout réel positif ou nul possède une unique racine carrée positive ou nulle.
   (g) Si $x + iy = x' + iy'$ avec x, y, x', y' réels alors $x = x'$ et $y = y'$.
   (h) On peut avoir $a + b = a' + b'$ sans que $a = a'$ et $b = b'$.
   (i) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax + b = a'x + b'$, alors $a = a'$, et $b = b'$.

   (j) Tout nombre réel de $[0,1]$ possède un développement décimal illimité (du type $0, a_1 a_2 .. a_n ...$ avec $a_n \in [|0,9|]$), mais celui-ci n'est pas toujours unique.

7. Montrer qu'une isométrie du plan, c'est à dire une application f de P dans P telle que pour tous points M, N, $f(M)f(N) = MN$, est injective (elle est aussi surjective, mais c'est beaucoup plus difficile à prouver !).

8. : Montrer que la fonction sinus est injective sur $\mathbb{Q}$.

9. : Soit $f \in \mathbb{F}^{\mathbb{E}}$, $g \in \mathbb{G}^{\mathbb{F}}$, $h \in \mathbb{H}^{\mathbb{G}}$;

   (a) Prouver les énoncés suivants :
      i. si $g \circ f$ est injective alors f aussi.
      ii. si de plus f est surjective alors g est injective.
      iii. si $g \circ f$ est surjective alors g l'est aussi.
      iv. si de plus g est injective alors f est surjective.

   (b) Si $g \circ f$ est bijective, que peut on en conclure pour f et pour g ? Donner un exemple où f n'est pas bijective.

   (c) Si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, montrer que f, g, h sont toutes les trois bijectives.

10. * : Soit $f \in \mathbb{F}^{\mathbb{E}}$; on définit g de $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{E})$ par $g(B) = f^{-1}(B)$ pour $B \subset \mathbb{F}$; ATTENTION : g n'est pas f^{-1} ! L'application f n'est pas supposée bijective ! Montrer que :

   (a) f est injective ssi g est surjective.

   (b) f est surjective ssi g est injective.

11. : A et B sont deux parties de $\mathbb{E}$.
Soit $f : \left| \begin{array}{c} \mathcal{P}(\mathbb{E}) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right.$

   (a) Calculer $f(\mathbb{E})$ et $f(A \cup B)$; en déduire une condition nécessaire pour que f soit injective ; montrer que cette condition est aussi suffisante.

   (b) Chercher un antécédent éventuel de $(A, \emptyset)$ par f ; en déduire une condition nécessaire pour que f soit surjective ; montrer que cette condition est aussi suffisante.

12. : Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications f et g de $\mathbb{Z}^2$ dans lui même définies par

$$f(x,y) = (4x - 3y, 5x - 4y) \text{ et } g(x,y) = (4x + 3y, 5x - 4y)$$

   (a) Le cas général constitue le sujet d'étude n°13.

13. * : Soient D_1 et D_2 deux droites dans un plan $\mathcal{P}$. Soit $M \in \mathcal{P}$. On note :

$$f : \left| \begin{array}{c} \mathcal{P} \to D_1 \times D_2 \\ M \mapsto (p_1(M), p_2(M)) \end{array} \right.$$

où $p_1(M)$ est le projeté orthogonal de M sur D_1 et $p_2(M)$ le projeté orthogonal de M sur D_2.
A quelle condition nécessaire et suffisante, l'application f est-elle bijective ?

14. * : Reformuler l'énoncé (qu'on ne demande pas de prouver) : “tout nombre entier naturel peut s'écrire comme somme de 4 carrés de nombres entiers naturels, mais cette décomposition n'est pas toujours unique, même lorsque l'on ne tient pas compte de l'ordre”, sous la forme : “l'application de ... vers...qui à tout...fait correspondre... est (ou n'est pas) injective (ou surjective ou bijective)”.

15. * : On appelle $\mathcal{A}_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^n$ l'ensemble des listes finies de nombres premiers et $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ l'ensemble des listes sans répétitions.
On appelle $\mathcal{A}_3$ l'ensemble des combinaisons avec répétition de nombres premiers et $\mathcal{A}_4 = \mathcal{P}_f(\mathbb{P}) \subset \mathcal{A}_3$ l'ensemble des combinaisons sans répétitions, c'est-à-dire l'ensemble des parties finies de $\mathbb{P}$.
Pour $i = 1, 2, 3, 4$ on désigne par f_i l'application $\left| \begin{array}{c} \mathcal{A}_i \to \mathbb{N}^* \\ X \mapsto \prod_{p \in X} p \end{array} \right.$ avec, par convention, $f_i(\emptyset) = 1$.
Par exemple :

$f_1\left((2,2,5,5,5,13)\right) = 2^2.5^3.13$
$f_2\left((2,5,13)\right) = 2.5.13$
$f_3\left(\{2,2,5,5,5,13\}\right) = 2^2.5^3.13$
$f_4\left(\{2,5,13\}\right) = 2.5.13$

Parmi les quatre applications f_i une seule est bijective : laquelle ?

16. * : L'antinomie de Cantor (1891).
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{N}$. Prouver que $B = \{m \in \mathbb{N} \;/\; m \notin A_m\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ qui n'est pas égale à l'un des ensembles A_n.
En déduire que $\varphi : \left|\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ n \mapsto A_n \end{array}\right.$ n'est pas surjective.
Remarque : Cela signifie qu'on ne pourra jamais numéroter toutes les parties de $\mathbb{N}$, c'est-à dire que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

17. * : il y a au moins autant de points dans une demi-droite que dans un quart de plan !
On rappelle que tout réel $\geqslant 0$ s'écrit de façon unique sous la forme $....a_k...a_1a_0,b_1....b_k..... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$, les nombres a_k étant des entiers entre 0 et 9, la suite (a_k) étant nulle à partir d'un certain rang, et la suite (b_k) n'étant pas constituée uniquement de 9 à partir d'un certain rang ;
on définit une application f de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}_+$ par
$$f(....a_k...a_1a_0,b_1....b_k..... \;;\; ....c_k...c_1c_0,d_1....d_k.....) = ...a_kc_k...a_1c_1a_0c_0,b_1d_1....b_kd_k.....$$
Par exemple, $f(46,3333...;1057,25) = 1004567,32353030.....$
   (a) Calculer $f(9/4,4/9)$ en le mettant sous forme de fraction.
   (b) Montrer que f est injective ; pourquoi ceci prouve-t-il ce qui est annoncé dans l'en-tête ?
   (c) Montrer que f n'est pas surjective (considérer 0,090909....).
   (d) Que dire de la restriction de f à $\mathbb{N}^2$?
   (e) ** : modifier f de sorte qu'elle devienne bijective.

18. * : Soit f une application de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{E}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$ et $\forall x \in \mathbb{E}\;\; f(x) \neq x$. Démontrer que si $\mathbb{E}$ a un nombre fini n d'éléments alors n est pair.
Applications :
   - le nombre de parties d'un ensemble fini est pair (résultat faible !!!).
   - le nombre de racines complexes non réelles d'un polynôme à coefficients réels est pair.

19. * : Soit $f : \left|\begin{array}{c} \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2 \\ n \mapsto (p(n), q(n)) \end{array}\right.$ une bijection. Déterminer à l'aide de f une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^3$.

20. * : On se donne trois ensembles finis ou infinis A, B, C, et on rappelle que la notation A^B désigne l'ensemble des applications de B vers A.
   (a) Montrer que $A^C \times B^C$ est en bijection avec $(A \times B)^C$.
   (b) Montrer que si B et C sont disjoints, $A^B \times A^C$ est en bijection avec $A^{B\cup C}$.
   (c) Montrer que $\left(A^B\right)^C$ est en bijection avec $A^{B\times C}$.